XXIV ONPCE: Oficina Nacional de Problemas de Corte e Empacotamento, Planejamento e Programação da Produção e Correlatos

---

Uma abordagem contínua para o problema do caixeiro viajante

Paula Cristina Rohr Ertel[1]
Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, IME-USP
Ernesto G. Birgin[2]
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, IME-USP

O problema do caixeiro viajante (ou TSP, do inglês *traveling salesman problem*) está entre os problemas mais estudados de otimização combinatória. Tal problema consiste na seguinte questão: dado um conjunto de m cidades, com a distância de se viajar de uma cidade i para qualquer outra cidade j conhecida, desejamos encontrar o tour de menor comprimento que passe por todas as m cidades uma única vez e retorne à cidade inicial. Apesar de ser um problema simples de descrever, o TSP pertence à classe de problemas NP-difícil e junto a suas variações possui aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, como logística, genética, neurociência, entre muitas outras [1].

Apesar do TSP ser um problema que já foi intensivamente investigado, seu estudo ainda apresenta muitas possibilidades, sobretudo quando consideramos novas abordagens para o problema. Uma delas é o CETSP, do inglês *close enough traveling salesman problem* [3, 4]. Nesta versão, uma vizinhança é associada a cada cidade, de modo a envolvê-la, e o objetivo é determinar o menor tour que inicia em um ponto específico, chamado de *depósito* na literatura, visita a vizinhança de cada cidade e retorna ao depósito. Ou seja, nesta variante do TSP, o tour não precisa percorrer cada cidade exatamente, mas apenas passar "próximo o suficiente" delas. A formulação dada pelo CETSP apresenta uma ampla aplicabilidade, pois pode ser utilizada para modelar vários problemas do mundo real. Alguns exemplos que aparecem na literatura são no uso de tecnologias de identificação por radiofrequência para leitura automatizada de medidores [3], na localização de incêndios florestais por veículos aéreos não tripulados [5] e no reconhecimento de diagnóstico de painéis solares [4].

Portanto, o objetivo deste trabalho é modelar e realizar experimentos numéricos para um caso particular do CETSP no qual as vizinhanças das cidades são bolas disjuntas do $\mathbb{R}^2$. Vamos denominar este problema por problema do caixeiro viajante contínuo (ou CTSP, do inglês *continuous traveling salesman problem* [2]). Matematicamnte, o CTSP consiste no seguinte problema: dado um conjunto de m bolas $\mathcal{B}_i \coloneqq \mathcal{B}(c^i, r^i)$ do $\mathbb{R}^2$, desejamos encontrar pontos $x^i \in \mathcal{B}_i$ para $i = 1, \dots, m$ e uma permutação i_1, i_2, …, i_m que minimize a função

$$f(i_1, \dots, i_m; x) \coloneqq \|x^{i_n} - x^{i_1}\| + \sum_{\nu=1}^{n-1} \|x^{i_\nu} - x^{i_{\nu+1}}\|, \tag{1}$$

em que $x^{i_\nu} = (x_1^{i_\nu}, x_2^{i_\nu}) \in \mathbb{R}^2$ para $\nu = 1, \dots, m$, $x^T = ((x^1)^T, \dots, (x^m)^T) \in \mathbb{R}^{2m}$ e $\|\cdot\|$ corresponde à norma Euclidiana.

Para resolver o problema (1) combinamos heurísticas do TSP discreto com um método de otimização contínua: o método de busca em bloco de coordenadas (BCDM, do inglês *block*

---

[1]paulaertel@ime.usp.br
[2]egbirgin@ime.usp.br

coordinate descent methods [6]). Em resumo, os algoritmos propostos iniciam com um conjunto inicial de m pontos $x_i \in \mathcal{B}_i$ para $i = 1, \ldots, m$. Com estes pontos fixados, uma permutação inicial $T^0 := (i_1^0, \ldots, i_m^0)$ é construída através da heurística do vizinho mais próximo (NN, *nearest neighbor*). Em seguida, os pontos x_i são recalculados com o método BCD considerando a permutação dada por T^0. Tais pontos irão compor o vetor $x^0 := (x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Com isso obtemos o tour inicial (T^0, x^0). A partir disso, os algoritmos seguem iterativamente, aplicando primeiro uma heurística de busca local (2-Opt ou de inserção) para determinar uma nova e melhor permutação T^{k+1} e, em seguida, atualizando os pontos de x^k com o método de busca em coordenadas de modo que o novo tour (T^{k+1}, x^{k+1}) gerado tenha um custo menor do que o da iteração anterior.

Experimentos numéricos foram realizados com os algoritmos propostos para avaliar seu desempenho e comparar os resultados encontrados por cada um. Para tanto, geramos 60 instâncias de pontos aleatórios, sendo 10 para cada número de bolas $m = 50$, 100, 200, 300, 400 e 500. Testes também foram realizados com 10 instâncias da biblioteca TSPLIB adaptadas ao CTSP. Nos experimentos observamos que os algoritmos que utilizam movimentos do tipo 2-Opt se sobressaem, na maioria dos exemplos, aos métodos que usam movimentos de realocação em relação a qualidade de soluções e tempo de execução. Outro detalhe observado é que, apesar dos métodos com a estratégia do *melhor vizinho* possuírem iterações mais custosas - pois avaliam todos os vizinhos antes de definir o próximo iterando - eles encontram na maioria dos testes soluções melhores, isto é, de menor comprimento do que os algoritmos que utilizam a estratégia do *primeiro vizinho* que melhora. Também notamos que o número de iterações tende a aumentar conforme o número de bolas cresce. Isso foi observado tanto nos experimentos com instâncias aleatórias quanto nos testes com instâncias da biblioteca TSPLIB. Em relação ao método BCD que compõe os algoritmos acima mencionados, temos que ele apresentou uma média de ciclos por chamada uniforme nos experimentos realizados com instâncias aleatórias. No entanto, este padrão não se repetiu com as instâncias da biblioteca TSPLIB, que a depender da complexidade e do número de bolas o BCDM realizou mais ciclos por chamada até atingir algum critério de parada.

Referências

[1] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal e W. J. Cook. *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study.* Princeton University Press, 2006.

[2] E. G. Birgin e J. M. Martínez. Block coordinate descent for smooth nonconvex constrained minimization. *Computational Optimization and Applications*, 83: 1–27, 2021.

[3] J. Dong, N. Yang, e M. Chen. Heuristic approaches for a tsp variant: The automatic meter reading shortest tour problem. Em *Extending the Horizons: Advances in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, 145–163. Springer US, Boston, 2007.

[4] A. D. Placido, C. Archetti e C. Cerrone. A genetic algorithm for the close-enough traveling salesman problem with application to solar panels diagnostic reconnaissance. *Computers & Operations Research*, 145:105-831, 2022

[5] S. Poikonen, X. Wang, e B. Golden. The vehicle routing problem with drones: Extended models and connections. *Networks*, 70(1): 34–43, 2017.

[6] S. J. Wright. Coordinate descent algorithms. *Mathematical Programming*, 151: 3–34, 2015.