XXIV ONPCE: Oficina Nacional de Problemas de Corte e Empacotamento, Planejamento e Programação da Produção e Correlatos

Programação por restrições para o problema de decisão do empacotamento bidimensional

Charbel Daher Boulos, Ana Clara Nascimento dos Santos, Pedro Hokama[1]
Universidade Federal de Itajubá
Mário César San Felice[2]
Universidade Federal de São Carlos

Neste trabalho é abordada a versão de decisão do problema empacotamento bidimensional ortogonal (2D-OPP, do inglês *Two-dimension Orthogonal Packing Problem*). Este problema tem como entrada um contêiner C com altura H e largura W, um conjunto de itens I, com cada item $i \in I$ tendo altura h_i e largura w_i. O objetivo é encontrar um empacotamento dos itens de I em C (ou provar que não existe), respeitando os limites de C e a não sobreposição dos itens, sendo que os itens não podem ser rotacionados e devem ter seus lados paralelos aos de C.

Na Figura 1, é mostrado um exemplo de instância do 2D-OPP onde o contêiner C possui uma altura igual a 5 e uma largura igual a 5 também. Neste exemplo o conjunto de itens I possui 3 itens e cada um com sua respectiva altura e largura.

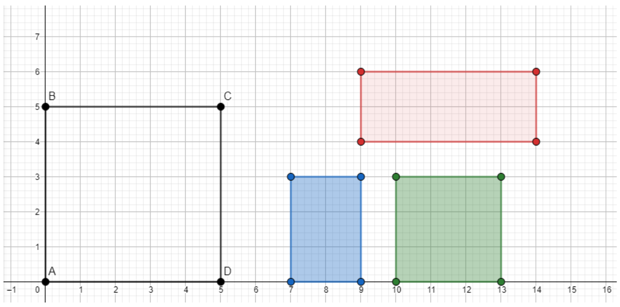

Figura 1: Exemplo de instância do 2D-OPP com 3 itens.

Para resolver problemas de otimização é possível utilizar variados métodos como Programação Linear Inteira, programação por restrições, entre outros. Neste trabalho é usado a programação por restrições (CP, do inglês *Constraint Programming*), que trabalha com um conjunto de variáveis as quais cada uma tem um conjunto finito de possíveis valores, denominadas por domínio (nomenclatura D). Em CP descrevemos restrições para estabelecer como uma solução do problema deve ser, utilizamos essas mesmas restrições para iterativamente reduzir o dominio das variáveis e eliminar valores que tornariam a solução inviável.

No caso do problema do empacotamento 2D, com as especificações dadas anteriormente, serão utilizadas duas variáveis para cada item i, X_i que representa a posição do item i no eixo x (da largura) e Y_i que será a posição do item i no eixo y (da altura). O domínio dessas variáveis será $D(X_i) = \{0, ..., W - w_i\}$ para largura e $D(Y_i) = \{0, ..., H - h_i\}$ para altura. Estes

[1] charbeldaher@unifei.edu.br, anaclarans@unifei.edu.br, hokama@unifei.edu.br
[2] felice@ufscar.br

domínios garantem que nenhum item ultrapasse os limites de C. E também, para garantir a não sobreposição dos itens, será adicionado a seguinte restrição para cada par de item i e j:

$$[X_i + w_i \leq X_j] \text{ ou } [X_j + w_j \leq X_i] \text{ ou } [Y_i + h_i \leq Y_j] \text{ ou } [Y_j + h_j \leq Y_i] \tag{1}$$

Neste trabalho são abordadas algumas formas encontrar um domínio inicial reduzido, denominadas Padrões. Um Padrão é um conjunto de pontos formado por diferentes critérios, porém, com o mesmo objetivo que é encontrar uma solução para empacotar todos os itens em C. Os Padrões analisados neste projeto são:

Padrão Boschetti (B): No Padrão Boschetti [1] cada item i possui um conjunto B_i^H que contêm apenas os pontos formados pela combinação dos demais itens e que somados à h_i não ultrapassem a altura de C, por exemplo, para o item azul da Figura 1, $D(X_i) = \{0, 2, 3\}$, pois ele só pode ser empacotado na base de C ou acima do item verde, ou acima do item vermelho. O conjunto de pontos do Padrão Boschetti B^H é formado pela união de todos os B_i^H, e analogamente o conjunto B^W.

Padrão Meet in the Middle (M): O Padrão Meet in the Middle (MIM) [2] tem o objetivo de diminuir a quantidade de pontos do Padrão Boschetti, ou seja, $|M| \leq |B|$. O conjunto de uma dimensão deste Padrão é formado pela união de outros dois conjuntos, e utiliza um parâmetro de limite denominado t (do inglês, threshold). A partir deste limite traçado, são obtidos, para a largura, o conjunto do Padrão da esquerda L_{it} (2) e o conjunto do Padrão da direita deste limite R_{it} (3).

$$L_{it} = \left\{ x = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \omega_j \xi_j \colon 0 \leq x \leq \min\{t-1, W - \omega_i\}, \xi_j \in \{0,1\}, \forall j \in I \setminus \{i\} \right\} \tag{2}$$

$$R_{it} = \left\{ W - \omega_i - x \colon x = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \omega_j \xi_j, 0 \leq x \leq W - \omega_i - t, \xi_j \in \{0,1\}, \forall j \in I \setminus \{i\} \right\} \tag{3}$$

Unindo os dois conjuntos e removendo os repetidos se obtém o conjunto de cada item para largura. Então, para encontrar o conjunto geral da largura W_t, basta fazer a união de todos os conjuntos gerais de cada item, e escolher o limite t que minimiza o número de pontos. Analogamente, para encontrar os conjuntos da altura será utilizado a mesma ideia, assim, acima terá o conjunto $U_{it'}$ e abaixo o conjunto $D_{it'}$. Da mesma forma que foi feita na largura, para altura será feito a união dos conjuntos de cima e de baixo para encontrar o conjunto geral da altura H'_t.

Referências

[1] Marco A Boschetti, Aristide Mingozzi, and Eleni Hadjiconstantinou. New upper bounds for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting stock problem. *IMA Journal of Management Mathematics*, 13(2):95–119, 2002.

[2] Jean-François Côté and Manuel Iori. The meet-in-the-middle principle for cutting and packing problems. *INFORMS Journal on Computing*, 30(4):646–661, 2018.