

Modelagem QUBO do Problema de K-Partições para uso em Computadores Quânticos

Renato Milhomem de Oliveira Filho ¹

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano

Bruno Brito Pereira de Souza (2,3) ²

Bruna Dutra Puppo (2,3) ³

Yadira Diaz Galeano (2,3) ⁴

² Instituto Tecnológico da Aeronáutica

³ Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP

Luiz Leduino Salles Neto ⁴⁵

⁴ Instituto de Ciência e Tecnologia

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático baseado em otimização quadrática binária sem restrições (Quadratic Unconstrained Binary Optimization, QUBO) para o problema de k-Partições Numéricas visando implementação em computadores quânticos.

O problema das k-Partições Numéricas consiste em alocar n elementos de uma dada sequência numérica V , em k subconjuntos disjuntos de modo que a diferença da soma dos elementos alocados em cada subconjunto seja mínima para quaisquer elementos do subconjunto tomados dois a dois [2, 4]. Dados os subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_k uma possível função objetivo que representa matematicamente o objetivo abordado pelo problema das k-Partições Numéricas é dada pela seguinte expressão:

$$\min F(A_1, A_2, \dots, A_k) = \max_j \left\{ \sum_{i \in A_j} v_i \right\} - \min_j \left\{ \sum_{i \in A_j} v_i \right\} \quad (1)$$

O problema das k-Partições Numéricas é NP-completo e suas generalizações e problemas derivados como o Problema do Empacotamento (*Bin Packing Problem*, BPP), são comumente encontrados em aplicações em Logística de Cadeias de Suprimento. [1].

Um modelo de otimização QUBO é definido pela minimização da seguinte expressão, considerando Q uma matriz triangular superior n de pesos reais e x um vetor de n variáveis binárias:

$$\min_{x \in (0,1)^n} f(x) = \sum_i Q_{i,i} x_i + \sum_{i < j} Q_{i,j} x_i x_j = x^T Q x \quad (2)$$

Modelos QUBO possuem ampla aplicação em problemas práticos, e configura as bases matemáticas para resolução de problemas de otimização via computadores quânticos baseados em recozimento (Quantum Annealers), este que por sua vez, tem atingido elevado grau de maturidade nos últimos anos [3].

Foi elaborado neste trabalho um modelo QUBO que visa minimizar a diferença da soma dos elementos do conjunto $C = c_i \in \mathbb{Z}_+^*$ alocados unicamente nas k partições como expresso na equação (3):

¹rmoliveira17@gmail.com

²brunobritopereirasouza@gmail.com

³bruna.puppo@ga.ita.br

⁴yadira.galeano.100967@ga.ita.br

⁵luiz.leduino@unifesp.br

$$\min z = \sum_{a=1}^t aT_a + P \left\{ \sum_{b=1}^n (1 - \sum_{j=1}^k x_{b,j})^2 + \sum_{c=1}^k (\sum_{i=1}^n x_{i,c} - n + \sum_{p=1}^d f_{c,p})^2 + \left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_{i,j} - \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_{i,l} - \sum_{a=1}^t aT_a \right)^2 \right\} \quad (3)$$

onde, $x_{i,j}$ é variável binária que expressa se c_i foi alocada a partição j , com $i \in (1, 2, \dots, n)$, $j \in (1, 2, \dots, k-1)$, $l \in (2, 3, \dots, k)$, $j < l$; $f_{c,p}$ são variáveis binárias que expressam se a folga p é ativada para a partição c , com $c \in (1, 2, \dots, k)$ e $d = n - 1$; T_t é variável binária que indica se a diferença t das parcelas é ativada, com $t = \frac{[8 \cdot \sum c_i + 1]^{\frac{1}{2}} - 1}{2}$; P caracteriza o conjunto das penalidades quadráticas adicionadas a função objetivo.

Testes de validação e desempenho computacional do modelo proposto foram realizados utilizando a ferramenta de otimização *Gekko*, e através do *Qiskit*, um ambiente em nuvem para processamento em computadores quânticos disponibilizados pela empresa *IBM*.

A figura 1 mostra o comportamento do tempo computacional de execução da ferramenta *Gekko*, considerando instância para $n = 12$ e variação linear do número de partições. Foi considerado gap mínimo de convergência $gap = 0,01$.

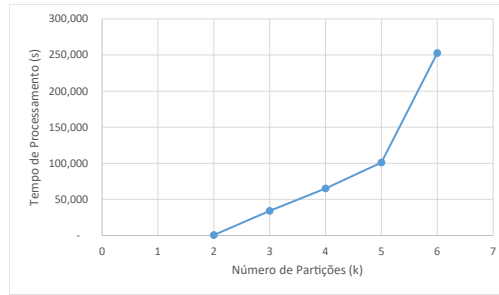


Figura 1: Tempo de Execução do Modelo x Número de Partições

Foi testada uma instância para $n = 4$ em ambas ferramentas supracitadas, retornando os mesmos resultados. Todavia, devido ao número limitado de qubits disponível na ferramenta *Qiskit*, o modelo não pode ser testado para instâncias maiores.

Ao propor nova abordagem do problema de k -Partições através de modelos QUBO, este trabalho contribuirá a solução ostensiva deste por computadores quânticos, quando atingir maior grau de maturidade tecnológica (aumento de número de Qubits).

Referências

- [1] Faria, A. F. *Algoritmos e Modelos Matemáticos para o Problema da k-Partição de Números*. Tese de Doutorado, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2017.
- [2] Moffitt, Search strategies for optimal multi-way number partitioning., *Twenty-Third International Joint Conference on Artificial Intelligence.*, June, 2013.
- [3] Punnen, Abraham P. *The Quadratic Unconstrained Binary Optimization Problem*. Springer, 2022.
- [4] Schreiber, E. L., Korf, R. E., Moffitt, M. D. Optimal multi-way number partitioning. *Journal of the ACM (JACM)*. 65(4), 1-61, 2018.